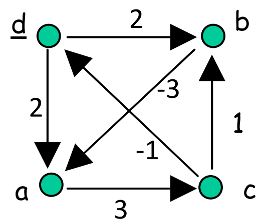
MATEMÁTICA DISCRETA II

SEGUNDO CONTROL (SOLUCIONES)

Ejercicio 1 (5 ptos.)



En el digrafo de la figura se quiere calcular el peso del camino mínimo desde el vértice **c** a cada uno de los restantes vértices. ¿Qué algoritmo debemos utilizar? Descríbelo brevemente y ejecuta las dos primeras iteraciones del algoritmo.

Solución

Debemos utilizar el **algoritmo de Bellman-Ford**.

Iteración: Repetir n–1 veces lo siguiente:

$\forall$ arco e = $u\,v$ actualizar la etiqueta $L(v)$: = $min\{\,L(v), L(u) + w(u\,v)\,\}$

arista\vértice	c	a	b	d
	0	∞	∞	∞
cb	0	∞	1	∞
cd	0	∞	1	−1
ac	0	∞	1	−1
ba	0	−2	1	−1
da	0	−2	1	−1
db	0	−2	1	−1

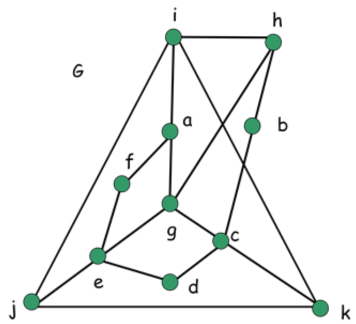
arista\vértice	c	a	b	d
	0	−2	1	−1
cb	0	−2	1	−1
cd	0	−2	1	−1
ac	0	−2	1	−1
ba	0	−2	1	−1
da	0	−2	1	−1
db	0	−2	1	−1

Ejercicio 2 (15 ptos.)

A) Probar que un grafo k – regular con (2k–1) vértices es hamiltoniano.

B) Probar que el grafo *G* de la figura siguiente no es hamiltoniano.

C) Hallar en el grafo *G* de la figura siguiente, aplicando los algoritmos correspondientes, un recorrido cerrado desde el vértice **a** que contenga a todas las aristas al menos una vez y que sea de peso mínimo.



Solución

A) Aplicando el **Teorema de Dirac**: $d(v) = k > \frac{n}{2} = \frac{2k-1}{2} = k - \frac{1}{2}$

B) Los vértices {b, d, f} son de grado 2, luego sus aristas {bc, bh, dc, de, fe, fa} deben estar en el ciclo hamiltoniano y por tanto las aristas {cg, ck, eg, ej} no pueden estar en el ciclo hamiltoniano.

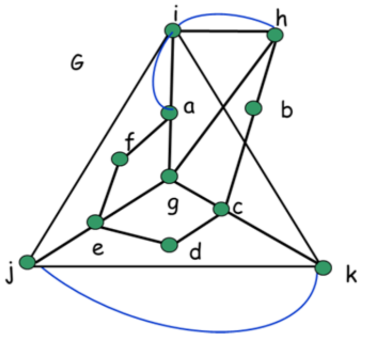
MATEMÁTICA DISCRETA II

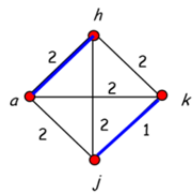
SEGUNDO CONTROL (SOLUCIONES)

Se construye el camino abierto [[g, a, f, e, d, c, b, h], i, j, k], o bien se construye el camino abierto [k, j, i, [a, f, e, d, c, b, h, g]], que no se pueden cerrar porque [i, j, k, i] es un ciclo.

C) Los vértices {a, h, j, k} son de grado impar, el grafo no es euleriano.

Con los vértices de grado impar se forma un grafo completo y se duplica el camino mínimo entre los vértices a y h y entre los vértices j y k.

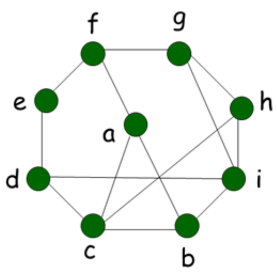




Recorrido euleriano cerrado C_E = [a, f, e, d, c, b, h, i, a, g, c, k, i, j, k, j, e, g, h, i, a]

Ejercicio 3 (5 ptos.)

Los enanos esconden su tesoro en el Laberinto de Moria, conjunto de cuevas excavadas en la montaña y conectadas por pasadizos. Los enanos quieren concentrar su tesoro sólo en el máximo número de las cuevas cumpliendo necesariamente que entre dos cualesquiera de las cuevas elegidas no puede haber conexión directa. Debes ayudar a los enanos a elegir adecuadamente las cuevas donde esconder su tesoro.



Solución

Si las cuevas elegidas no deben tener conexión directa, el conjunto elegido será un conjunto independiente máximo de vértices.

Aplicando el **algoritmo de independencia** se obtiene un conjunto maximal.

1) I = ∅ , P = V = [e, a, b, d, f, g, h, c, i], en orden ascendente de grado

I = [e], P = [a, g, b, c, h, i], en orden ascendente de grado

I = [e, a], P = [g, h, i], en orden ascendente de grado

I = [e, a, g], es un conjunto independiente maximal de cardinal máximo.

2) I = ∅ , P = V = [b, d, f, h, c, i]

I = [b], P = [d, f, h]

I = [b, d], P = [f, h]

MATEMÁTICA DISCRETA II

SEGUNDO CONTROL (SOLUCIONES)

I = [b, d, f], P = [h]

I = [b, d, f, h], P = []

3) I = ∅ , P = V = [c, i]

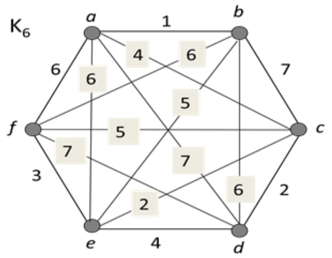
I = [c], P = [i]

I = [c, i], P = []

Por tanto, las cuevas elegidas son las del conjunto independiente S = {b, d, f, h}.

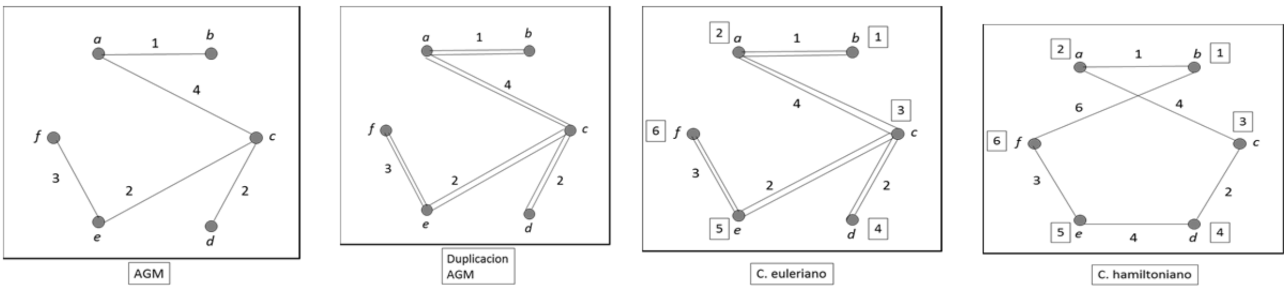
Ejercicio 4 (5 ptos.)

A) Define que es un algoritmo δ–aproximado para un problema de optimización.
B) Describe una solución 2 –aproximada para el "Problema del Viajante" en el grafo K_6 con pesos de la figura.



Solución

Si *G* es un grafo completo ponderado, *C* un ciclo hamiltoniano obtenido por el algoritmo de Algoritmo duplicación del *AGM* y *C** un ciclo hamiltoniano de peso mínimo entonces $w(C) \leq 2w(C^*)$.



Recorrido euleriano en H = [b, a, c, d, c, e, f, e, c, a, b]

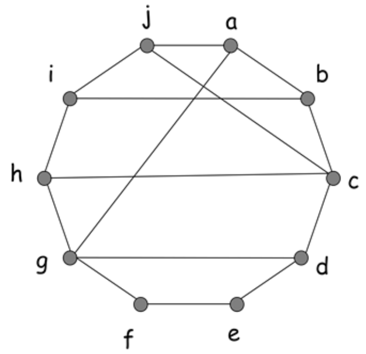
Ciclo hamiltoniano *C* = [b, a, c, d, e, f, b] de peso w(*C*) = 20.

Ejercicio 5 (15 ptos.)

A) ¿Cuántas aristas tiene, a lo sumo, un grafo conexo y planar con n = 14 vértices y que no posee ciclos de longitud 3 ni 4?
B) ¿Cuántas caras tiene, a lo sumo, un grafo conexo y planar con q = 30 aristas y d(v) ≤ 4, ∀ v ∈ V?
C) Aplica el teorema de Kuratowski para demostrar que el grafo *G* de la figura no es planar.
D) Calcula el número cromático del grafo *G* de la figura.

MATEMÁTICA DISCRETA II

SEGUNDO CONTROL (SOLUCIONES)

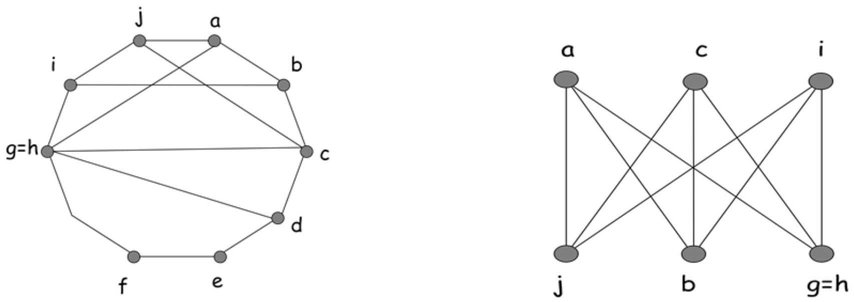


Solución

A) $q \leq \frac{z(n-2)}{z-2} = \frac{5(14-2)}{5-2} = 20$

B) $\begin{cases} 2q = \sum_{v \in V} d(v) \leq 4n \Rightarrow n \geq \frac{1}{2}q = 15 \\ n - q + c = 2 \Rightarrow c = 2 - n + q \leq 2 - 15 + 30 = 17 \end{cases}$

C) El grafo contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ por lo que no es un grafo planar.



D) Existe una coloración con 3 colores y el grafo contiene un ciclo impar [a, b, c, h, g, a].
Por tanto, no es bipartido, luego $\chi(G) = 3$.